

The background of the slide is a photograph of the EPFL campus in Lausanne, Switzerland. It shows modern university buildings, a large lake (Lac de Jussy), and mountains in the distance under a cloudy sky. A large red rectangle is overlaid on the right side of the image, and a dark blue rectangle is overlaid in the lower-middle section.

Leçon 0.2

Concepts Clés

ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

EPFL Concepts Clés

- Oscillateur élémentaire
- Transformation de Laplace

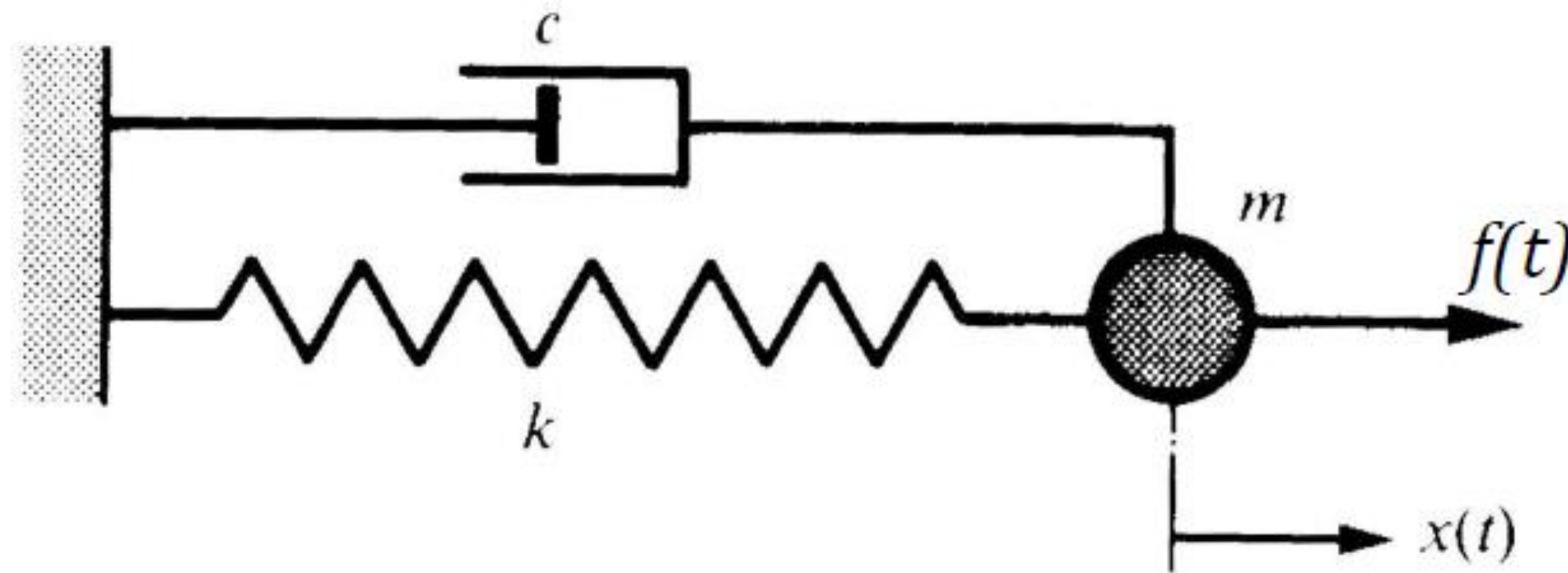
Chapitre 2: Oscillateur élémentaire

EPFL Définitions de Base

- On peut appliquer la 2eme loi de Newton:

- $m\ddot{x} = f(t) - kx - c\dot{x}$

- $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$ (2.1)



- Forme canonique de l'équation différentielle:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} f(t) \quad (2.5)$$

- Pulsation propre du système conservatif:

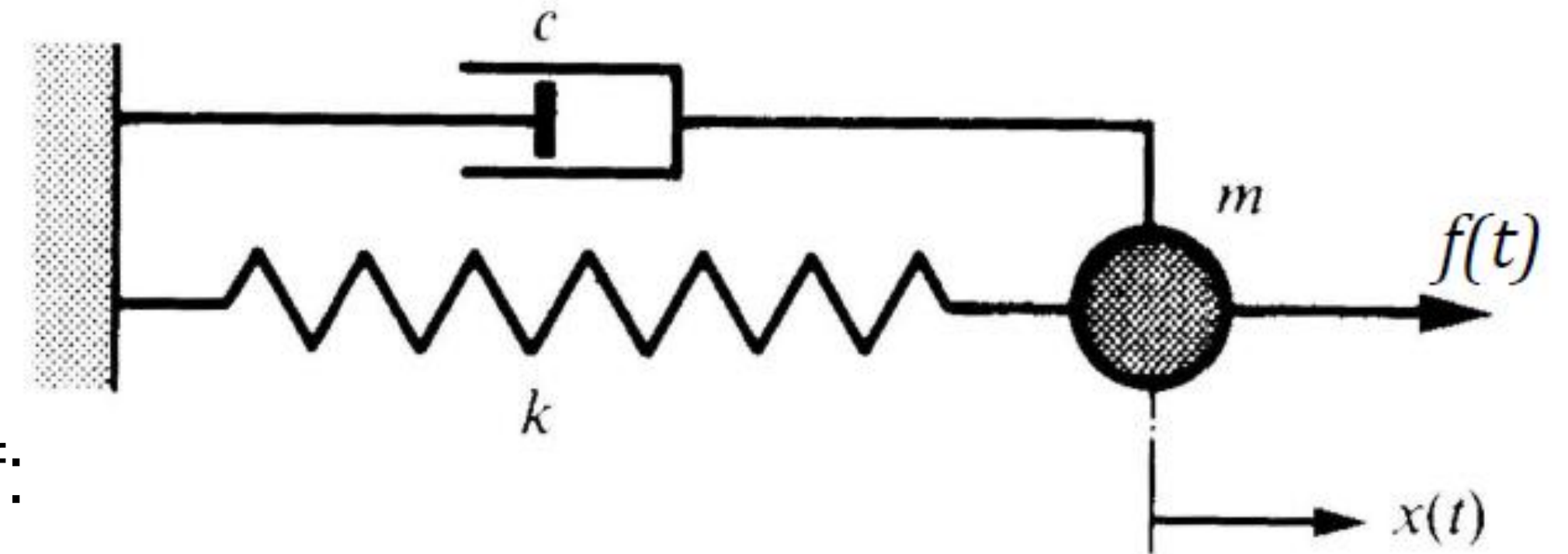
$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \leftrightarrow \left[\frac{1}{\text{s}} \right] \quad (2.2)$$

- Coefficient d'amortissement

$$\lambda = \frac{c}{2m} \rightarrow \left[\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \leftrightarrow \left[\frac{1}{\text{s}} \right] \quad (2.3)$$

- Facteur d'amortissement

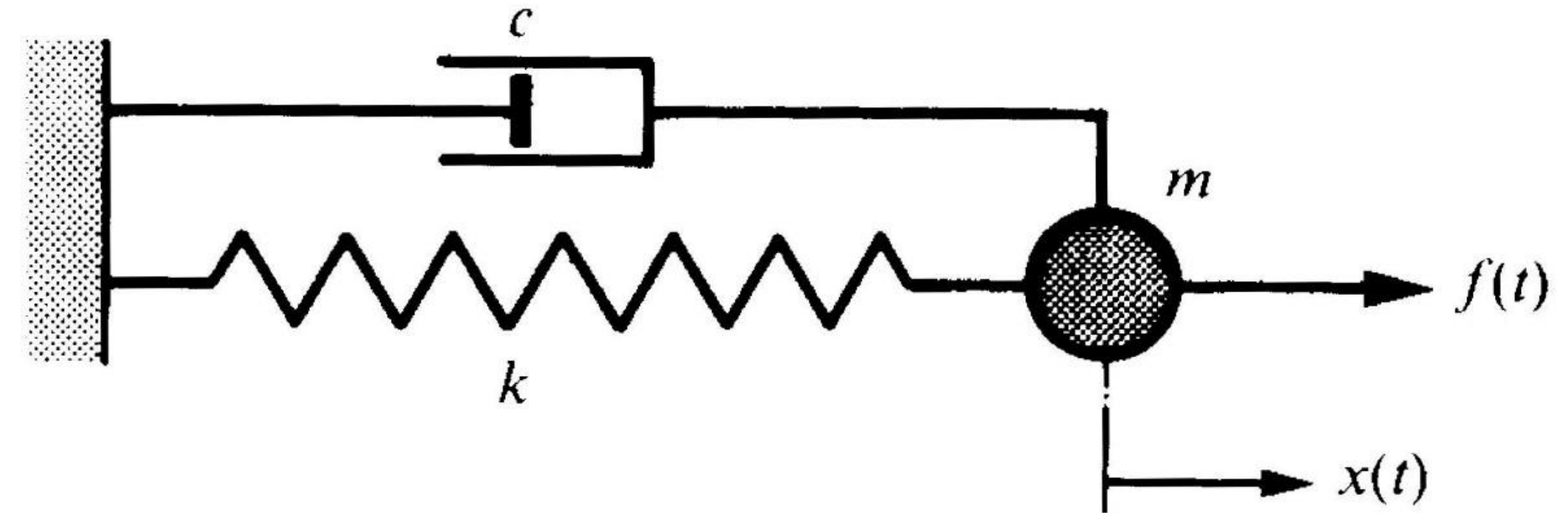
$$\eta = \frac{c}{2m\omega_0} = \frac{\lambda}{\omega_0} \rightarrow \text{Sans unités} \quad (2.4)$$



EPFL

Transformation de Laplace

EPFL Transformation de Laplace



Régime forcé de l'oscillateur élémentaire
(f quelconque)

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = f(t)$$

Solution complète de la forme

$$x = x'(t) + x''(t)$$

$x'(t)$ solution particulière de l'équation

$x''(t)$ solution générale sans second membre

Méthodes de résolution

- recherche directe de solutions particulières
- transformation de Laplace
- transformation de Fourier
- analyse numérique

EPFL

Transformation de Laplace

Transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ de la variable réelle t ($t \geq 0$)

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}(f(t))$$

Table de transformées de Laplace élémentaires			
$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
1	$\frac{1}{s}$	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$t \sin \omega t$	$\frac{2 \omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$
e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$
$t e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^2}$	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
$(1 + at) e^{at}$	$\frac{s}{(s - a)^2}$	$1 - \cos \omega t$	$\frac{\omega^2}{s (s^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{r_1 - r_2} (e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$	$\frac{1}{(s - r_1)(s - r_2)}$	$\operatorname{ch} \omega t - 1$	$\frac{\omega^2}{s (s^2 - \omega^2)}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2 s \sqrt{s}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$

Propriétés fondamentales de la transformée de Laplace		
$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	Remarques
$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$	$C_1 F_1(s) + C_2 F_2(s)$	Théorème de linéarité
$f'(t)$ $f''(t)$ $f^n(t)$	$s F(s) - f(0)$ $s^2 F(s) - (s f(0) + f'(0))$ $s^n F(s) - (s^{n-1} f(0) + \dots + s f^{n-2}(0) + f^{n-1}(0))$	Théorème des dérivées
$h(t) = \int_0^t f(u) g(t - u) du$ $= \int_0^t f(t - u) g(u) du$	$H(s) = F(s) G(s)$	Théorème de composition
$g(t) = 0$ pour $t < a$ $g(t) = f(t - a)$ pour $t \geq a$	$G(s) = e^{-as} F(s)$	Théorème du retard
$\int_{t_0}^t f(u) du$	$\frac{1}{s} F(s) + \frac{1}{s} \int_{t_0}^t f(u) du$	
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{1}{s} F(s)$	
$e^{-as} f(t)$	$F(s + a)$	

EPFL Transformation de Laplace

Transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$ de la variable réelle t ($t \geq 0$)

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}(f(t))$$

Transformée de Laplace du régime forcé de l'oscillateur élémentaire

$$m(s^2 X(s) - s X_0 - V_0) + c(s X(s) - X_0) + k X(s) = F(s)$$

avec les notations

$$\begin{aligned} X(s) &= \mathcal{L}(x(t)) & F(s) &= \mathcal{L}(f(t)) \\ x(0) &= X_0 & \dot{x}(0) &= V_0 \end{aligned}$$

Extraction de la transformée de Laplace du mouvement

$$\begin{aligned} X(s)(m s^2 + c s + k) &= \\ &= F(s) + X_0(m s + c) + V_0 m \end{aligned} \quad (6.1)$$